UNIVERZITET CRNE GORE

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

Elektromagnetika

Dinamičko elektromagnetno polje u neograničenoj izotropnoj sredini

1.1 Ravanski talas u neograničenom dielektriku

Kao opšta svojstva na kakvog promjenljivog (dinamičkog) elektromagnetnog polja mi smo utvrdili ovo: kad god pobudimo takvo polje na nekom mjestu onda se ono u formi elektromagnetnog talasa širi u okolni prostor brzinom

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{1}$$

U ovom poglavlju ćemo izučiti najprostiji mogući slučaj dinamičkog elektromagnetnog polja odnosno elektromagnetnog talasa ma koje učestanosti, pobuđenog u neograničenom homogenom i izotropnom dielektriku, pretpostavljajući da njegovo električno polje $\vec{E}$ ima samom jednu komponentu, recimo E_x , i da ova komponenta zavisi samo, recimo, od z-koordinate kao i od vremena t . Dakle, u matematičkoj formi

$$E = E_x(z,t) \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0\right) \tag{3}$$

Ovakav vrlo uprošćen elektromagnetni talas zove se **ravanski talas**. Njegovo izučavanje ima i teorijskog i praktičnog značaja. Teorijskog, da bi na njemu utvrdili neke opšte zakonitosti u toku jedne relativno proste analize; praktičnog, jer na jako velikim udaljenostima od antene elektromagnetni talas se vrlo približno ponaša kao ravanski talas.

Kako glase Maksvelove jednačine za ovaj talas?

Evo kako:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \qquad \vec{J} = 0 \text{ za dielektrik} \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \tag{6}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \tag{7}$$

($\rho = 0$ jer se pretpostavlja da nema slobodnog naelektrisanja)

Iz prve dvije jednačine slijedi

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} \tag{8}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ , ili} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

Analognim postupkom dobija se i

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

Relacije (11) i (12) predstavljaju talasne jednačine i to prva za električno polje $\vec{E}$ a druga za magnetno polje $\vec{H}$. Ovo su u stvari homogene diferencijalne jednačine drugog reda. Opšte rješenje, recimo relacije (11) glasi

$$E_x(z, t - \frac{z}{c}) \text{ odnosno } E_x(z, t + \frac{z}{c}) \tag{13}$$

Prvo rješenje predstavlja funkciju koja opisuje talas koje se prostire u smjeru z-ose pa se ovo rješenje i naziva <u>**direktnim**</u> ili <u>**progresivnim**</u> talasom. Drugo rješenje, predstavlja <u>**indirektni**</u> ili <u>**inverzni**</u> ili pak <u>**reflektovani**</u> talas.

U našem slučaju, tj slučaju beskonačnog dielektrika (homogenog i izotropnog) ovo drugo rješenje otpada.

Međutim, kako u praksi imamo posla sa prostoperiodičnim poljima odnosno talasima to ćemo ovu našu analizu usmjeriti u tom pravcu. Dakle, pretpostavićemo da je u beskonačnom homogenom izotropnom dielektriku pobuđeno prostoperiodično polje čija će električna komponenta imati ovakav matematički izraz

$$\underline{E} = \underline{E}_x(z)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{14}$$

I ovo polje, logično, opisuje homogena diferencijalna jednačina drugog reda

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} + \mu\varepsilon\omega^2\underline{E}_x = 0 \tag{15}$$

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \qquad (\Rightarrow \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \beta) \tag{16}$$

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} + k^2\underline{E}_x = 0 \tag{17}$$

Veličina k naziva se <u>**talasni broj**</u>. Definiše se na jedan od sledećih načina (označavao se još i sa β)

$$k = \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ , gdje je} \tag{18}$$

$$\frac{c}{f} = \lambda \text{ - talasna dužina} \tag{19}$$

Podsjetimo se za trenutak postupka rješavanja diferencijalne jednačine drugog reda: drugi izvod označavamo, recimo, sa r^2 . dok je sama funkcija $\underline{E}_x = 1$. Sada relacija (17) poprima oblik

$$r^2 = -k^2 \qquad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm jk = \pm \underline{\gamma} \tag{20}$$

Koja je čisto **imaginarna** veličina!

Sada će rješenje naše diferencijalne jednačine biti u obliku

$$\underline{E}_x = \underline{E}_{01}\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} + \underline{E}_{02}\,\mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \tag{21}$$

pri čemu je $\underline{\gamma}$ - **konstanta prostiranja** talasa. Prvi sabirak predstavlja direktni talas dok drugi sabirak predstavlja inverzni talas. S obzirom na polazni uslov drugi sabirak otpada, pa je direktni ravanski talas dat sa

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} \tag{22}$$

Kada smo odredili polje $\underline{E}$ kao jednu komponentu elektromagnetnog talasa nije teško odrediti i drugu njegovu komponentu – polje $\underline{H}$ - primjenjujući Maksvelovu jednačinu

$$\mathrm{rot}\,\vec{\underline{E}}_x = -j\omega\mu\vec{\underline{H}}_y \tag{23}$$

jer polje $\vec{\underline{H}}$ ima samo y-komponentu (s obzirom da polje $\vec{\underline{E}}$ ima samo x-komponentu i da ove dvije komponente moraju biti uzajamno normalne i vezane smjerom desnog zavrtnja, što je opet u skladu sa pojmom Pointigovog vektora). Iz poslednje relacije slijedi dalje

$$\vec{\underline{H}}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\,\vec{\underline{E}}_x \tag{24}$$

$$\vec{\underline{H}}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$\vec{\underline{H}}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\vec{i}_y\frac{d\underline{E}_x}{dz} \text{ , odnosno} \tag{26}$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{d\underline{E}_x(z)}{dz} = \frac{1}{j\omega\mu}jk\underline{E}_0\,\mathrm{e}^{-jkz} \tag{27}$$

$$\underline{H}_y = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\mu}\underline{E}_0\,\mathrm{e}^{-jkz} \tag{28}$$

$$\underline{H}_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \underline{E}_0 \, \mathrm{e}^{-jkz} \tag{29}$$

Veličina $\sqrt{\mu / \varepsilon}$ je **realna** veličina; obilježava se sa Z_c i zove se **karakteristična impedansa sredine**. Ona predstavlja određenu karakteristiku sredine odnosno dielektrika u našem slučaju. Dakle,

$$\underline{H}_y = \frac{1}{Z_c} \underline{E}_x \tag{30}$$

Veličina Z_c ima prirodu otpora te joj je jedinica 1Ω. Za vazduh odnosno vakuum ova veličina ima sledeću vrijednost:

$$Z_{c0} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}} = 120\pi \approx 377\Omega \tag{31}$$

Sada smo u stanju da napišemo izraze za trenutne vrijednosti električnog i magnetnog polja

$$\underline{E}_x(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{E}_x \, \mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{E}_{om} \, \mathrm{e}^{-jkz} \, \mathrm{e}^{j\omega t}\right] \tag{32}$$

$$\underline{E}_x(z,t) = E_{om} \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{33}$$

$$\underline{H}_y(z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{Z_c} \underline{E}_{om} \, \mathrm{e}^{-jkz} \, \mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \frac{E_{om}}{Z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \tag{34}$$

Iz navedenih izraza odmah se uočava da su ova dva polja **u fazi**!

Zaključak: kod ravanskog talasa je u svakom trenutku

1. $\frac{E_x}{H_y} = Z_c$, i

2. E i H su u fazi.

Grafički je moguće istovremeno prikazati gornje relacije u funkciji i vremena i koordinate-z pa ćemo, jednostavnosti radi, grafičke prikaze provesti za slučaj

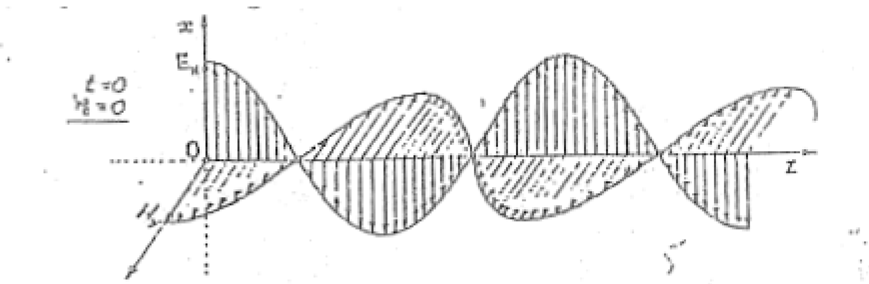
$$t = 0 \text{ i } \varphi_0 = 0 \tag{35}$$

Za trenutak $t = 0$ i vrijednost $\varphi_0 = 0$ izraz, recimo za polje E , postaje

$$E = E_x(z,0) = E_{om} \cos kz = E_{om} \cos(\frac{2\pi}{\lambda} z) \text{ , dok je} \tag{36}$$

$$H = H_x(z,0) = \frac{H_{om}}{Z_c} \cos kz = \frac{H_{om}}{Z_c} \cos(\frac{2\pi}{\lambda} z) \tag{37}$$

A njihova grafička predstava izgleda ovako:



Na kraju, razmotrimo još jedan važan pojam u vezi da prostiranjem talasa. U tom cilju vratimo se na argument bilo polja E ili polja H, pa postavimo relaciju

$$\omega t - kz + \varphi_0 = const \tag{38}$$

$$\omega dt - kdz = 0 \tag{39}$$

$$\frac{dz}{dt} = \upsilon_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c \tag{40}$$

Znači, talas se u pravcu z-ose kreće (prostire) brzinom $\upsilon_\varphi = c$. Ovo je **fazna brzina** ili **brzina prostiranja faze**.

Iz odnosa

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_c \text{ slijedi} \tag{41}$$

$$E_x = Z_c H_y = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_y \tag{42}$$

Nakon kvadriranja i množenja obiju strana sa $1/2$ dobija se

$$\frac{1}{2}E_x^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\varepsilon}H_y^2 \text{ , ili} \tag{43}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 = \frac{1}{2}\mu H_y^2 \tag{44}$$

Još jedan važan zaključak: **kod ravanskog talasa je u svakom trenutku energija elektromagnetnog polja ravnomjerno raspodijeljena na električnu i magnetnu komponentu**.

Pošto su amplitude komponentnih polja E_{om} i $\frac{E_{om}}{Z_c}$ a ove su konstante, to se talas prostire neoslabljen kroz dielektrik.

Napomena: Ravanski talas čije komponente ne zavise ili se ne mijenjaju u ravnu normalnoj na pravac prostiranja zove se **homogeni ravanski** talas.

1.2 Ravanski talas u djelimično provodnoj sredini

Opet ćemo posmatrati uprošćeni model elektromagnetnog talasa tj homogeni ravanski talas, ali ovoga puta u provodnoj ($\sigma \neq 0$) sredini koja je homogena izotropna i neograničena. Dakle, $E = E_x(z,t)$.

Maksvelove jednačine za ovakvu sredinu glase

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{45}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{46}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{H} \tag{47}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{48}$$

$$\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{49}$$

Za djelimično provodnu sredinu važi ova diferencijalna jednačina.

U specijalnom slučaju kada je dat **<u>prostoperiodični</u>** ravanski homogeni talas biće

$$\underline{E} = \underline{E}_x(z)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{50}$$

Pa gornja diferencijalna jednačina poprima ovu formu

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} - j\omega\mu\sigma\underline{E}_x + \omega^2\varepsilon\mu\underline{E}_x = 0 \tag{51}$$

Ili u pogodnijem obliku

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} + \omega^2\varepsilon\mu(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})\underline{E}_x = 0 \text{ , ili} \tag{52}$$

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} + \omega^2\varepsilon\mu(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)\underline{E}_x = 0 \text{ , ili} \tag{53}$$

$$\frac{d^2\underline{E}_x}{dz^2} + \omega^2\underline{\varepsilon}\mu\underline{E}_x = 0 \tag{54}$$

Pri čemu se veličina

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}) = \varepsilon(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta) \tag{55}$$

Naziva **<u>kompleksnom dielektričnom konstantom</u>**, za razliku od prethodnog slučaja, tj slučaja dielektrika gdje je ova veličina bila čisto **<u>realnog</u>** karaktera. Kako posledica ovakvog zaključka jeste da je i talasni broj k takođe kompleksna veličina data sa

$$k^2 = \omega^2 \mu \underline{\varepsilon} \text{ (jer je kod dielektrika bilo } k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \text{)} \tag{56}$$

$$\underline{k} = \omega \sqrt{\underline{\varepsilon} \mu} \tag{57}$$

Rješenje gornje diferencijalne jednačine (budući da nema reflektovanog talasa jer je sredina homogena i neograničena) biće

$$\underline{E}_x = \underline{E}_0 \, \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} \tag{58}$$

Gdje je sada

$$\underline{\gamma} = j\underline{k} \text{ (dok je kod dielektrika bilo } \underline{\gamma} = jk \text{ !)} \tag{59}$$

Dakle, konstanta prostiranja $\underline{\gamma}$ je kompleksna veličina. Zato je možemo pisati i u obliku zbira realnog i imaginarnog dijela

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\underline{\varepsilon}\mu} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu(-1 + j\,\mathrm{tg}\,\delta)} \tag{60}$$

$$(\alpha + j\beta)^2 = \omega^2\varepsilon\mu(-1 + j\,\mathrm{tg}\,\beta) \tag{61}$$

Najprije ćemo izjednačiti moduo kompleksnog broja s lijeve strane jednačine (61) s modulom kompleksnog broja sa desne strane iste jednačine

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta} \tag{62}$$

Sada ćemo kvadrirati lijevu stranu jednačine (61) i izjednačiti realne djelove s jedne i s druge strane

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\varepsilon\mu \tag{63}$$

Iz relacije (62) i (63) se dobija (sabiranjem odnosno oduzimanjem istih)

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta} - 1)} \tag{64}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta} + 1)} \tag{65}$$

Kada smo odredili vrijednosti za α i β , a znajući da je

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \tag{66}$$

Možemo napisati konačne izraze za distribuciju polja $\underline{E}$ i $\underline{H}$ u obliku

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_{om}\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} = \underline{E}_{om}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-j\beta z} \tag{67}$$

$$\underline{H}_y(z) = \frac{\underline{E}_{om}}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} = \frac{\underline{E}_{om}}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-j\beta z} \tag{68}$$

Pri čemu je karakteristična impedansa za provodnu sredinu kompleksna veličina, jer je po definiciji

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1 + j\,\mathrm{tg}\,\delta}{1 + j\,\mathrm{tg}^2\,\delta}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta}}{1 + j\,\mathrm{tg}^2\,\delta}\mathrm{e}^{j\delta}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta}}}\,\mathrm{e}^{j\frac{\delta}{2}} \quad (69)$$

Odakle slijedi

$$\left|\underline{Z}_c\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\delta}}}\cos\delta \ ;\ \Psi = \frac{\delta}{2}\ .\ \ (\left|\underline{Z}_c\right| = \sqrt{\frac{\mu\cos\delta}{\varepsilon}}\ ) \quad (70)$$

Trenutne vrijednosti komponenata elektromagnetnog polja su

$$\underline{E}_x(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{E}_x\,\mathrm{e}^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(\underline{E}_{om}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-j\beta z}\,\mathrm{e}^{j\omega t}) = E_{om}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) \quad (71)$$

$$\underline{H}_y = \mathrm{Re}(\frac{\underline{E}_{om}}{\underline{Z}_c}\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-j\beta z}\,\mathrm{e}^{j\omega t}) = \frac{E_{om}}{\left|\underline{Z}_c\right|}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_0 - \frac{\delta}{2}) \quad (72)$$

Sada možemo povući jasniju razliku između provodne (odnosno poluprovodne) i dielektrične sredine:

1. Amplituda talasa u poluprovodnoj sredini nije više konstantna nego opada po eksponencijalnom zakonu; mjere toga opadanja jeste koeficijent α koji se zove **konstanta slabljenja**.

2. Komponente talasa nijesu više u fazi; fazna razlika među komponentama elektromagnetnog polja iznosi $\delta / 2$, dakle, polovinu vrijednosti ugla gubitka.

Međutim, i dalje među komponentama važi odnos (tj među amplitudama trenutnih vrijednosti)

$$\frac{E_{om}}{H_{om}} = \left|\underline{Z}_c\right| \quad (73)$$

Šta koeficijent α znači u fizičkom smislu?

Neka je $z = \frac{1}{\alpha}$; tada je amplituda polja

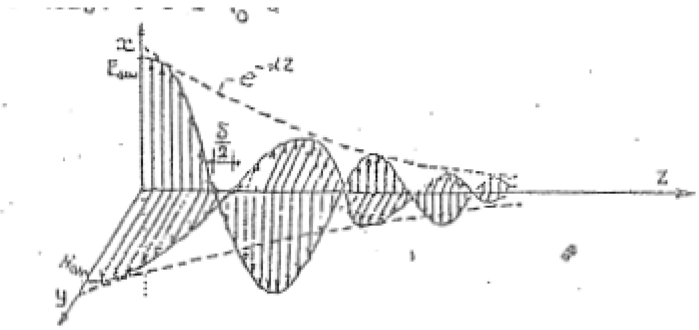
$$E_{om}\,\mathrm{e}^{-\alpha\frac{1}{\alpha}} = \frac{E_{om}}{\mathrm{e}} \quad (74)$$

Dakle, $\frac{1}{\alpha}$ je ona dužina poslije koje amplituda talasa opadne za e puta u odnosu na vrijednost koju je ta amplituda imala na ulasku talasa u sredinu! zato se veličina $\frac{1}{\alpha}$ naziva **dubina prodiranja**.

Zašto, fizički gledano, dolazi do slabljenja talasa u provodnoj sredini?

Kada u nekoj (polu)provodnoj sredini pobudimo elektromagnetno polje električna komponenta polja $\vec{E}$ stvara kondukcionu struju $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, a ova stvara Džulov efekat! Znači, dio energije talasa nepovratno se gubi na toplotu, te otuda i imamo slabljenje talasa u ovakvoj sredini.

Evo kako bi izgledala grafička predstava komponenata polja za uprošćen slučaj: $t = 0$ i $\varphi_0 = 0$



Pokažimo sada da se koeficijenti α i β, određeni za ovaj opšti slučaj, svode na iste one vrijednosti koje važe i za slučaj dielektrične sredine. Naime, za slučaj dielektrika važi da

$$\sigma \to 0 \text{ , te i } \delta \to 0 \text{ , pa i} \tag{75}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta}-1)} \to 0 \tag{76}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta}+1)} \to \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{77}$$

Što je isto kao i kod dielektrika.

Za slučaj idealne provodne sredine

$$\sigma \to \infty \text{ pa } \mathrm{tg}\,\delta \gg 1 \text{ , te je} \tag{78}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\omega\mu}{2}\mathrm{tg}\,\delta} = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \beta \tag{79}$$

Dakle, kod dobro provodnih sredina važi da je

$$\alpha = \beta \text{ , odnosno} \tag{80}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\Delta} \tag{81}$$

Gdje je

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu f\sigma}} \tag{82}$$

Pogledajmo u jednom konkretnom slučaju kolika je dubina prodiranja. Neka je materijal bakar (Cu). Za njega je, kao što znamo,

$$\sigma = 56\cdot 10^6\,S/m \text{ ; } \mu = \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,H/m \text{ ; neka je } f = 1MHz \tag{83}$$

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = 66\cdot 10^{-6}\,m = 66\,\mu m \text{ (mikrona)!} \tag{84}$$

Na svega $66\mu m$ talas slabi skoro 3 puta! U idealnom slučaju provodnost $\sigma \to 0$ imamo da i $\Delta \to 0$! Drugim riječima, ravanski talas uopšte ne prodire kroz idealni provodnik već se samo reflektuje (kao svjetlost od ogledala)! Praktično možemo smatrati da i kod bakra i kod aluminijuma dolazi do totalne refleksije!

Šta je sa faznom brzinom? (takođe u bakru)

$$\upsilon_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = 420m/s \tag{85}$$

(dok je pri istoj učestanosti u vazduhu bilo $c = 3 \cdot 10^8 m/s^{-1}$).

Šta je sa talasnom dužinom λ ?

$$\lambda = \frac{\upsilon_\varphi}{f} = \frac{420}{10^6} = 0,42mm \tag{86}$$

Zaključak:

Elektromagnetni talas kad uđe u provodnu sredinu jako mu opada i fazna brzina (υ_φ) **i talasna dužina** (λ) **u odnosu na dielektrik!**